MATEMATICHE

FASCICOLO PRIMO

TEMI D'ARITMETICA

TEMI

D'ARITMETICA

PER USO

Della Studiosa Gioventù

FASCICOLO PRIMO

PISA

Presso Ranieri Prosperi

Tipografo dell' I. e R. Università

1837.

TEMI D' ARITMETICA

NECESSARII A SAPERSI DA QUEI GIOVANI NOVIZJ, CHE DEVONO SUBIRE L' ESAME IN QUESTA SCIENZA, PER ESSERE ISCRITTI AL RUOLO DEGLI SCOLARI DELLA I. E R. UNIVERSITÁ DI PISA.

TEMA PRIMO

Numerazione; e trè prime operazioni dirette sù i numeri, cioè, Addizione, Moltiplicazione, ed Elevazione a potenze.

TEMA SECONDO

Denumerazione; e trè prime operazioni inverse sù i numeri, cioè, Sottrazione, Divisione, ed Estrazione delle radici, e segnatamente della radice quadrata e cubica.

TEMA TERZO

Frazioni in generale; loro principali proprietà; e prime trè operazioni dirette ed inverse sulle medesime

TEMA QUARTO:

Frazioni decimali; loro principali proprietà; prime tre operazioni dirette ed inverse sulle medesime; e traduzione approssimativa od esatta delle frazioni ordinarie in decimali.

Tema Quinto

Radicali numerici. Come s' interpetrano? Loro principali proprietà; prime trè operazioni dirette ed inverse sù i medesimi; e traduzione approssimativa in decimali de' Radicali segnatamente quadrati e cubici.

Tema Sesto

Teorìa delle proporzioni e progressioni aritmetiche, e geometriche.

Tema Settimo

Regola così detta del Trè *diretta ed inversa, e regola composta.*

« Les Éleves sont les meilleurs juges de « leurs Instituteurs.

« Ce n' est pas en les entendant parler, « qu' ils doivent apprécier leurs talens pour « l' enseignement, c' est en sortant de leurs « leçons; celles qu' ils ont le mieux retenues, « leur paraissent les meilleures, et le sont en « effet de quelque façon qu' elles aient été « composées et debitées. Il me semble, que « chaque Instituteur doit suivre ses dispositions « naturelles pour la maniere de débiter ses « leçons : en exposant ses idées comme il les « pense, il les fait mieux entendre à ses Éle- « ves, que par un discours appreté. La char- « me du style peut faire illusion; mais il ne « fixe pas les idées de l' Instituteur dans le « souvenir des Éleves.

« Seances des Écoles Normales.

„ DAUBENTON „

TEMA PRIMO

Numerazione, e trè prime operazioni dirette sù i numeri; cioè Addizione, Moltiplicazione ed Elevazione a potenze.

§ I.

NUMERAZIONE.

1. *Aritmetica* è la Scienza de' Numeri.

Confrontando l'idea semplice, che mi si presenta allo spirito, appena scoperta ed avvertita l'esistenza d'una cosa, con ciascuna delle idee composte, che l'una dopo l'altra io mi formo, allorchè, dopo avere scoperta pure ed avvertita l'esistenza d'un'altra cosa individuale simile alla precedente, poi d'un'altra, poi d'un'altra, e così di seguito, separatamente, considero di mano in mano la coesistenza simultanea di tutte coteste cose avvertite, mentre ho nella prima idea la nozione di *unità*, io acquisto in ciascuna delle seconde la nozione di *numero*, il quale si può riguardare come la collezione di più unitá.

Chiamo *Numerazione* l'operazione di riunire delle unità ad una per volta.

Per poco composto che sia un numero, siccome egli non si offre al mio spirito, che sotto l' idea vaga di moltitudine, se a ciascuna collezione d'unità io non impongo nn segno scritto od articolato, per distinguerla dalla collezione precedente che ha una unità di meno, così io sento il bisogno di trovare un qualchè metodo di numerare semplice e chiaro, per cui con un numero limitato di segni scritti od articolati io possa scrivere e proferire un numero qualunque di cose.

Vediamo, che metodo posso tenere.

2. Abbia io da numerare per es. una moltitudine di gettoni sparsi quà e là in confuso sulla mia tavola. Opero, come segue.

Porto tutti i diti delle mie mani sopra altrettanti di cotesti gettoni, e poi gli riunisco in un sol gruppo da parte.

Ripeto questa operazione sù i gettoni residui, finchè ne avanzino meno del numero de' miei diti; e poi riunisco quest' ultimo avanzo in una casella quì fatta sulla tavola.

Prendo in seguito a considerare i gruppi messi da parte; e facendo sopra di essi, come se ciascuno fosse un solo gettone più grosso, le medesime operazioni che ho già fatte sopra i primi gettoni, metto da capo da parte i gruppi più grossi che ottengo, e colloco quelli, che avanzano in queste seconde operazioni, in una seconda casella a sinistra della precedente.

Ripetendo sopra i nuovi gruppi più grossi delle operazioni simili riunirò pure gl' ultimi gruppi residui in una terza casella a sinistra della seconda precedente.

Seguitando ad operare nello stesso modo arriverò finalmente a dover riunire in un'ultima casella a sinistra delle precedenti un numero di gruppi i più grossi di tutti, il quale sicuramente sarà minore del numero de' diti tutti delle mie mani.

3. Potrebbe accadere, che al termine di ciascuna delle operazioni fatte non avanzassero o punti de'primi gettoni, o punti de' primi gruppi, o punti de' secondi . . ; In questo caso io lascerò vuota la casella, in cui di mano in mano collocherei l' avanzo, se vi fosse, di cotesti gettoni, o di cotesti diversi gruppi; e passerò per la collocazione dell' avanzo della operazione ulteriore alla casella, che segue a sinistra.

È certo però in ogni caso, che, sebbene vi possano rimanere più caselle consecutive vuote, la casella però ultima a sinistra, ove vanno collocati i gruppi i più grossi di tutti, vuota non resterà mai.

4. Raccolti in questa guisa tutti i miei gettoni, e distribuitili, come ho fatto, in gruppi della medesima grandezza per ciascuna casella dopo la prima, in cui si trovano gli spiccioli avanzati alla prima operazione, e di grandezza diversa da una casella all' altra, io concepisco, che quando sappia parzialmente formarmi una idea adequata del numero de' gettoni spiccioli della prima casella, e del numero de' diversi gruppi di ciascun' altra casella a sinistra, ed inoltre del numero de' gettoni di ciascuno di questi gruppi, io concepisco, dico, che non mi riescirà gran fatto difficile il formarmi anche una idea adequata del numero totale dei miei gettoni.

Ora dietro le operazioni, che ho fatte, vedo

1.° Che il numero sì de' gettoni della prima casella, sì de' gruppi di ciascun' altra casella, è minor del numero de' diti tutti delle mie mani.

2.° Che un gruppo solo della seconda casella si compone precisamente di tanti gettoni compagni a quelli, che io voglio numerare, quanti sono i diti tutti delle mie mani; e che in generale d' altrettanti gruppi, compagni a quelli d' una casella qualunque dopo la prima, si compone un gruppo solo della casella consecutiva immediatamente a sinistra.

Quindi concludo, che, quando io mi fossi già formata una idea chiara, e distinta di tutti quei pochi numeri, che posso rappresentarmi con i soli diti, tutti od in parte aperti, delle mie mani, e che io fissassi de' segni e de' nomi per esprimere in scritto, ed a voce cotesti diversi numeri, io sarei in grado, non solo di formarmi una idea distinta e chiara del numero totale de' miei gettoni, ma di più con un numero limitato e di segni e di nomi saprei anche scrivere, e press' a poco proferire cotesto numero totale, comunque grande egli fosse.

5. Io suppongo qui d' essermi già formata una idea chiara e precisa de' successivi numeri, che posso rappresentarmi aprendo, dopo il primo, tutti gli altri diti delle mie mani, e d' aver fissati e de' nomi e de' segni scritti per distinguere cotesti numeri l' uno dall' altro; perciò, dopo aver aperto il primo dito, e proferita la parola *uno*, scrivo per segno di questa parola, ossia per denotare l' *unità*, il segno 1, imagine di cotesto dito aperto e disteso; indi nell' atto che apro successivamente gli altri diti, e proferisco di mano in mano le parole *due*, *trè*,

quattro, *cinque*, *sei*, *sette*, *otto*, *nove*, *dieci*, ossia, come suol dirsi più brevemente, nell'atto che io *conto*, scrivo come segni respettivi de' numeri espressi da coteste parole, eccettuata l'ultima, gli otto segni *distinti* o *caratteri* seguenti

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Per denotare il numero espresso dalla parola ultima *dieci*, io non impiego alcun carattere a parte, perchè non ne ho di bisogno.

6. Tornando adesso a' miei gettoni io conto, secondo quello che ho imparato.

1.° I gettoni spiccioli della prima casella, i quali chiamo *unità del prim' ordine*, e poi scrivendo in essa il carattere corrispondente al loro numero, che sarà uno de' nove precedenti, non escludendo il carattere 1, che denota l'unità, tolgo via cotesti gettoni.

2.° I gruppi della seconda casella, che io chiamo *unità del second' ordine*, come se ciascuno fosse un gettone dieci volte grosso più d'uno di quelli del prim' ordine; e poi, scrivendo in essa il carattere corrispondente al loro numero, tolgo via cotesti gruppi.

3.° I gruppi della terza casella, che io chiamo *unità del terz' ordine*, come se ciascuno fosse un' altro gettone dieci volte grosso più d'uno di quelli del second'ordine della seconda;

e poi scrivendo in essa il carattere corrispondente al loro numero, tolgo via anche cotesti secondi gruppi.

E così di seguito fino all' ultima casella a sinistra.

Se accade, che vi sia qualchè casella *vuota*, come ho di sopra (3) avvertito, allora per denotare questa circostanza vi scriverò il carattere o, che chiamo *zero*.

Fatto ciò, e rammentandomi, che una unità del second' ordine per le operazioni fatte ne *vale* dieci di quelle del primo; che una del terzo ne vale pure dieci di quelle del secondo, e generalmente, che una unità d' un cert' ordine ne vale sempre dieci di quelle d' un ordine immediatamente inferiore, è chiaro, che, se io imagino tolte di mezzo anche le caselle, e considero soltanto il *sistema* de' caratteri, che ho scritti, questi pel loro significato assoluto, e per quello relativo alla loro località mi presenteranno, come all' occhio una imagine, così alla mente una idea adequata del numero totale de' miei gettoni.

7. Facendo pertanto astrazione da cotesti gettoni, da ciò, che fin quì abbiamo visto apparisce, che inteso il significato de' dieci caratteri seguenti

o, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, che re-

spettivamente si pronunziano *zero*, *uno*, *due*, *tre*, *quattro*, *cinque*, *sei*, *sette*, *otto*, *nove*, se si conviene « che due, o più di essi, di-
« versi o compagni, essendo scritti l' uno im-
« mediatamente dopo l' altro da destra verso
« sinistra, l' ultimo scritto abbia un valore die-
« ci volte più grande di quello del penultimo
« nella ipotesi, che questo fosse compagno,
« eccettuato però il primo carattere o »
noi siamo in grado di scrivere con essi soli un numero qualunque *in astratto*, comunque grande egli sia, e di formarci anche una idea adequata della di lui grandezza.

8. Questa convenzione suppone, è vero, che un certo numero di cose, composte ciascuna di dieci altre, si risolva in tante di queste seconde cose, in quante si risolve precisamente il medesimo numero di tali cose, ripetuto dieci volte; come per es., che *trè* gruppi di *dieci* gettoni l' uno si risolvano nel medesimo numero di gettoni, ne' quali si risolvono *dieci* gruppi di *trè* gettoni l' uno; lo che è chiaro, perchè, decomponendosi ciascuno de' *trè* primi gruppi in *trè* file orizzontali di *dieci* gettoni l' una, si hanno *dieci* file verticali, ciascuna delle quali si può riguardare come resultante dalla decomposizione d' un gruppo di *trè* gettoni.

9. Del resto il primo de' precedenti dieci ca-

ratteri, cioè il carattere o, che come segno di *vuoto* si chiama *zero*, si suol chiamare anche *cifra*; come pure si chiamano *cifre* anche gli altri nove caratteri; ma però essi son cifre *significative*, perchè hanno in se medesime un *valore*, mentre la cifra o non ha in se stessa valore alcuno.

Convenendo poi, che la parola *cifre*, e la parola *numeri*, de' quali esse non sono, che puri segni scritti, siano come sinonimi, baratteremo in seguito spesso e volentieri queste due parole trà loro; ma ci rammenteremo sempre, che tali parole non sono, che segni d' idee resultanti da una operazione del nostro spirito, giacchè in questo mondo non v' è nulla che sia per se stesso *due*, *trè*, *quattro* . . . .

Che anzi qualchè volta, come segni, chiameremo per estensione *numeri* anche le due cifre o ed 1, sebbene queste non presentino mai una tale idea.

10. Quanto abbiamo fin quì detto intorno alla Numerazione è piuttosto relativo alla *Numerazione scritta*, che alla *Numerazione parlata*.

Rendiamo adesso un pò più sensibile l' una e l' altra, facendo vedere come ambedue si praticano e che dependenza hanno tra loro; e nel medesimo tempo, perchè la seconda in bocca d' altri diversifica alcun poco da quella, che potremmo parlar noi co' nomi fin quì proferiti, vediamo come possiamo metterci d'accordo coll' uso invalso.

A quest'oggetto ripigliamo la considerazione de' nostri gettoni e delle nostre caselle.

11. Imaginiamo primieramente due caselle vuote.

Avendo fatta di tutti i gettoni una massa, separiamone ora un sol gruppo di dieci, e messolo in conformità a ciò, che si è detto di sopra (2) nella seconda casella, se in questa si scrive la cifra 1, e nella prima a destra la cifra 0, imaginando poi tolto il gruppo colle due caselle, si vede subito, che il numero espresso dalla parola *dieci* vien rappresentato dal sistema delle due cifre 10.

Se poi si prendono dalla massa altri nove gettoni, e fingendo di metterli, o d'averli messi, l'uno dopo l'altro nella prima casella vuota si scrive in questa di mano in mano la cifra corrispondente al numero, che vi se ne mette, appariranno successivamente scritti i nove numeri seguenti

11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

Questi numeri, secondo i nomi da noi fin quì proferiti, dovrebbero respettivamente pronunziarsi *dieci-uno*, *dieci-due*, *dieci-trè*, *dieci-quattro*, *dieci-cinque*, *dieci-sei*, *dieci-sette*, *dieci-otto*, *dieci-nove*;

ma si pronunzieranno

undici, *dodici*, *tredici*, *quattordici*, *quindici*, *sedici*, *diciassette*, *diciotto*, *diciannove*

per conformarsi oramai all' uso.

12. Rimettiamo adesso i gettoni tutti alla massa; e poi, separando da essa nove gruppi di dieci gettoni l'uno, collochiamoli l'uno dopo l' altro, come si deve, nella seconda casella.

Scrivendo in questa di mano in mano la cifra significativa corrispondente, e nella prima tenendo ferma la cifra o, compariranno scritti l' uno dopo l' altro i seguenti nove numeri

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Posta mente in ciascuno di questi numeri alla seconda cifra, ch' è significativa, e tacendosi la prima, il primo di essi pronunziandosi *dieci*, o chiamandosi *un-dieci*, gli altri si potrebbero respettivamente pronunziare

due-dieci, *trè-dieci*, *quattro-dieci*, *cinque-dieci*, *sei-dieci*, *sette-dieci*, *otto-dieci*, *nove-dieci*;

ma si pronunzieranno

venti, *trenta*, *quaranta*, *cinquanta*, *sessanta*, *settanta*, *ottanta*, *novanta*

per conformarsi quì pure all' uso.

13. Dopo aver rimessi alla massa i nostri gettoni, imaginiamo adesso trè caselle vuote; e poi, separati da essa dieci gruppi di dieci gettoni l'uno, e fattone di tutti un gruppo solo, se per notare, che questo và messo nella terza casella, che gli appartiene, si scrive in questa la cifra 1, ed in ciascuna delle altre due caselle si scrive la cifra 0, ne resulterà il sistema delle trè cifre 100 per rappresentare il numero de' gettoni, di cui si compone cotesto ultimo gruppo più grosso.

Siccome un tal gruppo è composto di *dieci* gruppi di *dieci* gettoni l'uno, cosí la terza cifra del numero 100, tacendosi le altre due, potrebbe pronunziarsi *dieci-dieci*; ma noi la pronunzieremo *cento*, all' oggetto di render più semplice il discorso, e di dare un nome alla unità del terz' ordine, come ne abbiamo dato uno a quella del secondo, che si è chiamata *dieci*.

Presi in seguito dalla massa altri otto gruppi compagni all' ultimo precedente più grosso, ed imaginandoli collocati l'uno dopo l'altro nella terza casella, ove già trovasi cotesto gruppo, se di mano in mano vi si scrive la cifra corrispondente al loro numero, appariranno successivamente scritti gli otto numeri seguenti 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, che col nome già dato di *cento* o d' *un-cento* al numero 100 si pronunzieranno respettivamente

dugento, *trecento*, *quattrocento*, *cinquecento*, *seicento*, *settecento*, *ottocento*, *novecento*.

14. I nomi fin quì proferiti bastano per enunziare o *leggere* un sistema qualunque di trè cifre, delle quali la prima a sinistra sia sempre significativa, potendo le altre essere significative o nò.

All' oggetto poi di rendersi familiare e la *scrittura* e la *nomenclatura* insieme di tutti i numeri, che si possono dipingere all' occhio con due o trè cifre al più; e nello stesso tempo per farsi una idea anche più chiara della loro attual composizione colla unità, s' imagini, che, versando de' gettoni ad uno per volta nella prima a destra delle trè caselle vuote, ogni volta che si arriva a dieci gettoni, se ne faccia un gruppo, e questo si porti nella seconda casella a sinistra; e che ogni volta che quì pure s' arriva a dieci gruppi se ne faccia di tutti uno più grosso, e questo si porti nella terza casella a sinistra della precedente, ove c' arresteremo. Contemporaneamente a questa operazione scrivendo di mano in mano in ciascuna casella la cifra dovuta, significativa o nò, e pronunziando i nomi che competono a ciascuna cifra ed al suo posto, nel sistema di non più di trè cifre, che ne resulterà, ci verrà fatto di enunciare o leggere il numero corrispondente de' gettoni versati.

15. Indipendentemente da' gettoni, o da altri oggetti qualunque sarà bene esercitarsi a leggere un numero scritto con trè cifre a piacere, di cui la prima a sinistra sia sempre significativa; e se si provasse della difficoltà ad enunciarne qualcheduno, come per es. il numero 111, rammentandosi che la prima cifra a sinistra si pronunzia *cento*, e che il sistema delle altre due si pronunzia *undici*, esso s' enunzierà subito *centundici*.

In generale ne' numeri di trè cifre la prima significativa a sinistra denota sempre de' *centi*; il sistema poi delle altre due denota un numero, che si pronunzia facilmente per ciò che precede, tacendo gli zeri, se ve ne sono.

Così il numero 725 s' enunzia *settecento venticinque*, ed il numero 901 s' enunzia *novecentuno*, come il numero 910 s' enunzia *novecento dieci*.

16. Il più gran numero, che si possa scrivere con sole trè cifre è visibilmente 999, il quale s' enunzia *novecento novantanove*.

Rappresentando il sistema di queste trè cifre un determinato numero di gettoni, 9 dei quali sono stati collocati nella prima casella, 9 primi gruppi nella seconda e 9 secondi gruppi nella terza, è facil vedere, che, se s' aggiunge loro un gettone di più, il *numero consecutivo*, che ne risulterà, anderà rappresentato col sistema delle quattro cifre 1000.

Infatti, versando un gettone di più nella prima casella, si vede, che quì dovrà farsi un gruppo e questo portarsi nella seconda, ove di questi gruppi se ne trovano già 9 altri; però di tutti questi gruppi se ne farà pure uno nuovo, che si porterà nella terza, dove si farà un terzo gruppo più grosso, che anderà portato in una quarta casella.

In questa guisa rimanendo vuota, la prima, la seconda e terza casella, e trovandosi un gruppo solo nella quarta, scrivendosi in ciascuna casella la cifra dovuta si presenterà scritto il numero 1000, come si dicea.

Questo numero, ch' equivale a *dieci-centi* si pronunzia *mille* per denotare una unità del quart' ordine, posta mente soltanto alla prima cifra significativa a sinistra.

17. Posto ciò, ecco come con una semplice convenzione si può, senza pensar più a' nostri gettoni, enunciare un numero qualunque in astratto, scritto con quante mai cifre si vogliano.

Si separino, o s' imaginino separate le cifre di cotesto numero con una o più virgole in sistemi o parti di trè cifre ciascuna da destra verso sinistra, non curandosi che l' ultima parte, cioè la prima a sinistra, resti di due ed anche d' una cifra sola. La prima cifra a destra di ciascuna di queste parti, denotando per quello, che si è detto (6), unità respettivamente del 1°, 4°, 7°, 10°, 13°, . . ordine, è visibile, che una unità dell' ordine 4.° valendone *mille* di quelle del 1.° (16), una del 7°, 10°, 13°, . . ne varrà pur *mille* respettivamente di quelle del 4°, 7°, 10°, . . .

Come dunque il numero astratto, che compone una unitá del 4.° ordine in confronto d'una unità del 1°, ossia d' una *unità semplice*, si chiama *mille*, così

1.° Il numero, che compone una unità del 7.° ordine, e che si può pur chiamar *mille* in confronto d' una unità del 4°, si chiami *millone*, o *milione* in confronto della medesima unità semplice.

2.° Il numero, che compone una unità del 10.° ordine, e che si può pur chiamar *mille* in confronto d' una unità del 7.° ordine e *milione* in confronto d' una unità del 4°, si chiami *bilione* in confronto della medesima unità semplice.

3.° Il numero, che compone una unità del 13.° ordine, e che si può pur chiamar *mille* in confronto d' una unità del 10°, un *milione* in confronto d' una unità del 7°, ed un *bilione* in confronto d' una unità del 4°, si chiami *trilione* in confronto della medesima unità semplice primitiva.

E così, via discorrendo, si usino successivamente le parole *quadrilione*, *quintilione*, *sestilione*, ...

In questa guisa il numero parziale di trè cifre, che costituisce la prima delle parti, in cui è stato spezzato il numero totale proposto, essendo un numero di unità semplici, le quali si possono anche chiamare *uni*, quello, che costituisce la seconda, terza, quarta, quinta, . . . parte sarà un numero respettivamente di *milli*, *milioni*, *bilioni*, *trilioni*, . . .

Enunciando dunque co' nomi di già imparati (15) ciascuna di queste parti, ed a cominciar da destra verso sinistra all'enunciato della seconda parte aggiungendo la parola *milli* o *mila*, a quello della terza la parola *milioni*, a quello della quarta la parola *bilioni*, od anche *milliardi*, se si vuole; a quello della quinta la parola *trilioni*, e così di seguito, il numero totale proposto, di quali e quante mai cifre si componga, leggendolo co' medesimi nomi anche alla rovescia, cioè da sinistra verso destra, si potrà sempre completamente enunciare; e per le molte riflessioni già fatte avremo anche una idea abbastanza chiara e precisa della di lui grandezza.

18. Bisogna rammentarsi per maggior speditezza, che, quando a sinistra di qualche cifra significativa in una parte si trovano uno o due zeri, questi nell' enunciato si tacciono; come si taccion pure tre zeri insieme, che formano una medesima parte intiera.

Avvertiremo anche, che senza stare ad adoprar virgole per enunciare un numero scritto, acciò le parti, nelle quali si riguarda come spezzato, si distinguano trà loro, noi le potremo scrivere un pò discoste l'una dall'altra.

Così per es. invece di scrivere
20,012,001,101,001 scriveremo
20 012 001 101 001, e questo numero s' enuncierà
Venti trilioni-dodici milliardi-un milione-centun mila-uno.

Viceversa non è difficile lo scrivere un numero, di cui si abbia l' enunciato; per es. *un milliardo-uno* si scrive 1 000 000 001.

Esercitiamoci molto ad enunciar de' numeri scritti, ed a scrivere degli enunciati di numeri, abituandosi a scriver le cifre del numero alla rovescia dell' enunciato, cioè da destra verso sinistra, in conformità al nostro *sistema di Numerazione scritta*, giacchè così si rischierà meno di commetter degli sbagli.

19. Prima di passare ad altro si può osservare, che un numero già scritto si rende per le nostre convenzioni di mano in mano tante volte dieci volte più grande, ossia tante diecine di volte di mano in mano più grande, quanti zeri gli si scrivono di seguito a destra, cioè dieci volte scrivendo uno zero, cento volte scrivendo due zeri, mille volte scrivendone trè; e così di seguito.

Viceversa un numero si renderà dieci, cento, mille, . . volte più piccolo, quando gli si sopprimano respettivamente uno, due, tre, . . . zeri, che esso abbia di seguito a destra.

Quanti mai zeri poi si scrivano a sinistra d' un numero, essi non gli fanno cangiar *valore*, cioè il significato delle sue cifre rimarrà sempre lo stesso; e ciò in conformità alle nostre convenzioni (7).

Del resto in un numero scritto, come si è detto (18), mentre le cifre della prima parte a cominciar da destra verso sinistra si chiamano respettivamente *unità*, *diecine* e *centinaja semplici*, quelle della seconda si dicono *unità*, *diecine*, *centinaja di migliaja*; quelle della terza *unità*, *diecine*, *centinaja di milioni*; quelle della quarta *unità*, *diecine*, *centinaja di bilioni*, o *milliardi*; e così di seguito

20. Avvertiremo anche quì un' altra volta per sempre, che conservando alle cifre, di cui è composto un numero scritto, oltre al valore assoluto, anche il loro valore locale, noi baratteremo pur volentieri in seguito, come per una cifra sola s' è avvertito anche di sopra (9), la parola *numero* nella parola *cifre*, e viceversa; di modo che volendosi su i numeri praticare alcune operazioni, come d' ora in avanti andiamo a vedere, quando diremo d' operare, o di dovere operare *sopra una o più cifre*, intenderemo sempre che si operi o debba operarsi *sul numero* rappresentato dal complesso o sistema di coteste cifre medesime.

§ II.

« *Prime trè operazioni dirette sù i Numeri*,
« *cioè*, *Addizione*, *Moltiplicazione*, *ed*
« *Elevazione a potenze*.

1. Da quanto abbiamo precedentemente detto intorno alla Numerazione in generale ci pare d' esserci messi in grado non solo di saper contare e riunire insieme più unità *ad una per*

volta, componendo de' numeri *consecutivi*; ma anche di sapere scrivere in cifre, ed enunciare in parole cotesti numeri medesimi comunque grandi essi siano; nel che consiste appunto la Numerazione propriamente detta *scritta* e *parlata*.

Si tratta adesso d'abbreviare, o compendiare una tale operazione riunendo delle unità a *più per volta*, ossia riunendo de' numeri con de' numeri; e siccome un numero qualunque essendo scritto, si sà subito enunziare, così pel nostro oggetto non ci resta ora, che a vedere, come, dati più numeri scritti, si può ottenere scritto il numero più grande, che risulta dalla loro riunione.

Questa prima operazione, che si fà propriamente sù i numeri scritti, o sulle cifre, dicesi generalmente *Addizione*.

Qualche volta dicesi anche *Somma*; ma volendo parlar con esattezza si dirà *Somma* piuttosto il resultato, od il numero *scritto*, che l'Addizione farà trovare.

Prima di vedere con qual processo d'operazioni si eseguisca l'Addizione, cominceremo dal distinguere trè casi

1.° Quello, in cui i numeri da addizionarsi siano quanti mai si vogliono e trà loro generalmente disuguali; nel qual caso consiste l'Addizione *propriamente detta*.

2.° Quello in cui cotesti numeri siano pure quanti mai si vogliono, ma però tutti trà loro uguali; ed in questo caso l' Addizione prenderà il nome di *Moltiplicazione*.

3.° Quello, in cui, oltre all' essere uguali, siano anche precisamente tanti, quante unità semplici denota ognuno di essi; ed in questo l' Addizione o Moltiplicazione chiamerassi *Elevazione a potenze*.

CASO I.

Addizione propriamente detta

2. Per l' abitudine, che ho a riunire delle unità ad *una* per volta ad un numero già formato, io suppongo d' avere imparato a riunirvene per volta anche *due*, *trè*, *quattro*, . . ., *nove*, ed a scuoprire il numero, che ne resulta; vale a dire, suppongo di sapere *addizionare* ad un numero d' una o più cifre un'altro numero d' una cifra sola.

Così, suppongo di sapere per es. che 7 e 3 sono 10, e 5 sono 15, e 7 sono 22, e 9 sono 31, . . . Posto ciò

Si abbiano più numeri scritti con quante mai cifre si vuole ciascuno; e si tratti d'assegnare *scritto* quel numero, il quale resulta dalla loro riunione, ossia, si tratti d'assegnar la *somma* di tutti cotesti numeri.

A quest'oggetto io scrivo in primo luogo tali numeri orizzontalmente l'uno sotto l'altro, in modo, che tutte le unità del medesimo ordine, a cominciar da quelle del primo, si trovino in una stessa direzione verticale, o, come suol dirsi, *in colonna*; indi sotto l'ultimo numero scritto tiro un frego o linea orizzontale. Fatto ciò, incominciando da destra

« 1.° Addiziono tutti i numeri, o cifre della « prima colonna; e, se la somma riesce mi- « nor di *dieci*, ne scrivo la cifra corrispon- « dente sotto la linea tirata in direzione della « medesima prima colonna; ma, se riesce mag- « giore di *dieci*, non vi scrivo, che la cifra « dell'avanzo al numero delle *diecine*, che una « tal somma contiene, riserbando queste die- « cine per la seconda colonna, che è appunto « quella delle diecine.

« 2.° A questo numero di diecine serbato « aggiungo le cifre della seconda colonna; e, « se la somma riesce minor di dieci, ne scri- « vo pure la cifra corrispondente sotto la linea « tirata accanto alla cifra già scritta, ed in « direzione della medesima seconda colonna;

« ma se riesce maggior di dieci, non scrivo,
« che la cifra dell' avanzo al numero delle die-
« cine, che cotesta colonna contiene; e le quali
« io porto alla terza colonna.
« 3. A questo secondo numero di diecine di
« diecine, ossia di *centinaja*, aggiungo le ci-
« fre della terza colonna, ch' è appunto quella
« delle centinaja; e secondo che la somma rie-
« sce minore, o maggiore di dieci, vi scrivo
« sotto o cotesta somma, o l' avanzo alle die-
« cine, che contiene; e le quali io serbo per
« la colonna seguente a sinistra; e così di se-
« guito, finchè arrivando all' ultima colonna,
« cioè alla prima a sinistra, vi scriverò sotto
« tale quale la somma, che troverò per essa ».

S' intende bene, che quando la somma per una colonna è minor di dieci non ritenendosi punte diecine per la colonna seguente, in questa quì vanno sommate solamente le sue cifre; ed inoltre, se non avanza nulla al numero delle diecine per una colonna, allora vi và scritta sotto la cifra o.

Dopo questa operazione il numero, che risulterà scritto sotto la linea orizzontale tirata, sarà la somma voluta de' numeri proposti.

3. Il processo delle nostre operazioni si giustifica subito, e si rende per così dire, sensibile all' occhio ed al tatto, se s' imagina, che

le cifre significative della prima, seconda, terza, . . . colonna da destra verso sinistra denotino respettivamente de' gettoni spiccioli, de' primi, de' secondi, . . . gruppi; e che cominciando dagli spiccioli si pratichino sopra di essi, e sù i successivi gruppi diversi le medesime operazioni praticate in principio (§ 1 N.° 2), all' oggetto di poter collocarli tutti in una sola fila orizzontale di caselle sotto la linea tirata, in modo che per ciascuna casella il numero delle unità venga espresso da una sola cifra in conformità al nostro sistema di Numerazione.

4. Passiamo adesso a degli esempj.

Si debbano addizionare per es. i trè numeri 39 013, 2 012, 999 999.

Dopo averli scritti l' uno sotto l' altro, come segue

2 012	
39 013	
999 999	
1 041 024	Somma

e tirato frego, dico e fò così.

« 9 e 3, 12; e 2, 14. (Ritengo 1, e segno 4)
« 1 di ritenuto e 9, 10; e 1, 11; e 1, 12. (Ri-
« tengo 1, e segno 2)
« 1 e 9, 10. (Ritengo 1, e segno 0)

« 1 e 9, 10; e 9, 19; e 2, 21. (Ritengo 2, « e segno 1)

« 2 e 9, 11; e 3, 14. (Ritengo 1, e segno 4)

« 1 e 9, 10. (Segno 10).

L' operazione è terminata, e mi resulta per *somma* il numero 1 041 029, come si vede.

Ecco parecchj altri esempj d' addizione per servir d' esercizio

11	20	3 388	73
750	300	9 763	589
684	9 092	77 756	789 632
909	6 789	90 257	10 376 786
2 354	16 201	181 164	11 167 080

400 010 001	4 409 345 832
2 300 100 011	4 700 345 083
70 000 000 001	2 232 345 883
31 100 100 190	4 444 444 444
730 100 190 001	5 555 555 555
833 900 400 204	21 342 036 797

5. Del resto, quando gli Uomini incominciarono a rappresentarsi de' numeri, ed a far meccanicamente delle somme, invece d' usar dei segni scritti, si può supporre, ch' essi impiegassero de' gettoni; ed effettuassero coteste somme nel modo, che si è accennato (3); ma noi vogliamo credere, ch' essi impiegassero piuttosto delle *pietruzze* di differente grandezza per distinguere i diversi ordini d' unità, per la ragione, ch' è da gran tempo invalso l' uso di chiamare comunemente *calcolo* qualunque operazione, che si faccia sù i numeri scritti, dal vocabolo Latino *calculus*, che vuol dire *pietruzza*. Noi in seguito useremo frequentemente questa parola *calcolo*.

CASO II.

6. La operazione dell' Addizione si semplicizza assai, quando i numeri da addizionarsi sono tutti uguali trà loro.

In tal caso scrivendo cotesti numeri in colonna, come si è detto (2), si vede, che per ottenerne la somma non si ha da far altro, che ripetere per ciascuna colonna una certa cifra costantemente il medesimo numero di volte; e che però, se avessimo preventivamente sott' occhio le somme, od i *resultati*, che possono ottenersi ripetendo una certa cifra un numero proposto di volte, noi otterremmo, quasi a colpo d'occhio, la somma che si cerca.

Ma ciò non potendosi ottenere in generale, noi ci contenteremo di porre sott'occhio soltanto que' pochi resultati, che si ottengono nel caso particolare, in cui il numero delle volte sia anch'esso d'una cifra sola, e questa non più grande dell'altra; ed essi soli basteranno al nostro scopo, come vedremo.

7. A cotest'oggetto io incomincio dal far nove file disuguali di caselle, cioè la prima di nove caselle, la seconda di otto, la terza di sette, . . .; e colloco coteste file orizzontalmente l'una sotto l'altra, in modo che le ultime caselle a destra siano in fila verticale. Fatto ciò, e dopo avere scritte nella prima fila orizzontale, una per casella, da sinistra verso destra, le nove cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

1.° Addiziono queste cifre, eccettuata la prima, ciascuna a se stessa; e scrivo le somme, che trovo, una per casella, nella seconda fila orizzontale.

2.° Addiziono a queste somme, eccettuata la prima, le medesime cifre, eccettuate le prime due; e scrivo le nuove somme, che trovo, una per casella, nella terza fila orizzontale.

3.° Addiziono da capo a queste seconde somme, eccettuata la prima, quelle medesime cifre, eccettuate le prime trè; e scrivo le terze somme, che trovo, una per casella, nella quarta fila orizzontale; e così di seguito.

Dopo queste operazioni apparisce, che, marcando a sinistra ciascuna fila orizzontale, a cominciar dalla prima, co' respettivi segni 1. *v*, 2. *v*, 3. *v*, 4. *v*, 5. *v*, 6. *v*, 7. *v*, 8. *v*, 9. *v*, che si pronunzino *una volta*, *due volte*, *tre volte*, ..., *nove volte*, se nell' atto che si dice per es. *cinque volte* 7, si cerchi la cifra 7 nella prima fila orizzontale, e quindi si discenda verticalmente alla casella della fila, marcata 5. *v*, si troverà in questa casella il numero 35, che resulta dal ripetere cinque volte la cifra 7.

Ecco il prospetto di tutte queste operazioni nella seguente Tavola, che dicesi di *Pittagora*.

1. *v*	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2. *v*	4	6	8	10	12	14	16	18
		3. *v*	9	12	15	18	21	24	27
			4. *v*	16	20	24	28	32	36
				5. *v*	25	30	35	40	45
					6. *v*	36	42	48	54
						7. *v*	49	56	63
							8. *v*	64	72
								9. *v*	81

8. S' impari a mente questa tavola; e sebbene essa non ci somministri che quei pochi resultati, i quali si ottengono col ripetere una cifra per un' altra, che non sia maggior di lei, pure avremo in essi anche quelli per una cifra maggiore, quando si barattino le due cifre trà loro; ciò che si può, giacché per es. 7 file orizzontali di 5 gettoni ciascuna, collocate l'una sotto l' altra, formando 5 file verticali di 7 gettoni ciascuna, si vede, che 5 volte 7 ci dà lo stesso numero, che 7 volte 5.

Del resto, conformandosi all' uso, per maggior speditezza la lettera *v*, invece di *volte*, si pronunzierà *via*, sebbene fosse meglio pronunziarla *fia*, che vuol dir *fiata*.

Passiamo ora a qualch' esempio d' applicazione

1.° Si debbano addizionare 7 numeri compagni al numero 725; ossia si debba ripetere 7 volte il numero 725.

Scrivendo questo numero sei volte di seguito sotto a se stesso, come segue, e poi addizionando al solito si avrebbe per somma il numero 5 075, che si vede

	725
	725
	725
	725
	725
	725
	725
	5 075 Somma

Ma per trovar più speditamente una tal somma per mezzo della Tavola di Pittagora, dopo avere scritta la cifra 7 sotto l' ultima cifra del numero 725 da ripetersi, e tirato frego, io dico e fò così . . .

« 5 via 7, 35. (Ritengo 3 e segno 5).
« 2 via 7, 14; e 3 di ritenuto, 17. (Ritengo 1, e segno 7).
« 7 via 7, 49; e 1, 50. (Segno 50).

Ecco il *tipo* del calcolo

$$\begin{array}{r} 725 \\ 7 \\ \hline 5\ 075 \end{array}\ \text{Somma}$$

2.° Si debba ripetere 9 volte il numero 7 345.
Ecco il tipo del calcolo

$$\begin{array}{r} 7\ 345 \\ 9 \\ \hline 66\ 105 \end{array}\ \text{Somma}$$

che io eseguisco così
« 5 via 9, 45. (Ritengo 4, e segno 5)
« 4 via 9, 36; e 4, 40. (Ritengo 4, e
« segno 0)
« 3 via 9, 27; e 4, 31. (Ritengo 3, e
« segno 1)
« 7 via 9, 63; e 3, 66. (Segno 66).

9. Nell' uno e nell' altro de' due precedenti esempj le cifre da ripetersi erano tutte significative: se qualcheduna non fosse stata tale, cioè, se fosse stata la cifra 0, allora dicendosi per convenzione, per es. *sette via zero*, o *nove via zero*, si sarebbe fatto bene a dire pure *zero*;

e, se niente vi fosse stato di ritenuto, si sarebbe segnata la cifra 0; diversamente quella del ritenuto.

La ragione di ciò è chiara, perchè in un'addizione, se le caselle d'una colonna sono tutte vuote, non può aversi da quella colonna somma alcuna; e così resta vuota anche la casella corrispondente, che s'imagina sotto il frego, quando non vi sia da portar nulla dalla colonna precedente a lei.

3.° Dovendosi per es. ripetere 4 volte il numero 7 080 130, ecco il tipo del calcolo

$$\begin{array}{r} 7\ 080\ 130 \\ 4 \\ \hline 28\ 320\ 520 \end{array}\ \text{Somma,}$$

che io eseguisco così

« 4 via 0, 0. (Segno 0).

« 3 via 4, 12. (Ritengo 1, segno 2).

« 1 via 4, 4; e 1 5. (Segno 5)

« 4 via 0, 0. (Segno 0)

« 4 via 8, 32. (Ritengo 3, e segno 2)

« 4 via 0, 0; e 3, 3. (Segno 3)

« 4 via 7, 28. (Segno 28).

10. Negli esempj precedenti abbiamo supposto, che il numero delle volte, che dovea

ripetersi un dato numero, fosse d' una cifra sola.

Se cotesto numero fosse di più cifre, la operazione non presenterebbe maggior difficoltà: solamente in questo caso, invece d' effettuarsi in una volta sola, essa s' effettuerebbe in più volte.

Per vedere, come ciò succeda, supponghiamo di dover ripetere un numero *dato* un numero qualunque *proposto* di volte, di cui le cifre siano tutte significative, com' è per es. il numero 532. È visibile, che la operazione si potrà decomporre in trè altre operazioni parziali; vale a dire, si potrà ripetere il numero dato prima 2 volte, poi 30; e poi 500 volte.

Fatta adunque, come si sà, la prima di queste operazioni, passeremo per la seconda a ripetere 30 volte, o (ciò ch' è lo stesso in virtù del nostro sistema di Numerazione) 3 volte una diecina di volte il suddetto dato numero; ma per ripetere un tal numero una diecina di volte, ossia per renderlo *dieci* volte maggiore, basta (pel medesimo sistema di Numerazione) figurarsi, ch' esso esprima delle diecine in cambio d' unità semplici; dunque la operazione seconda si riduce a ripetere, come si sà fare, 3 volte il dato numero, reputato adesso di diecine; e però a scrivere il secondo resultato, che si troverà, sotto il primo in modo, che la prima cifra a destra di quello corrisponda in colonna alla seconda di questo. Con un simil ragionamento si prova, che la terza operazione si riduce a ripetere 5 volte il numero dato; e quindi a scrivere il terzo resultato sotto il secondo precedente, in modo che la prima cifra di quello corrisponda in colonna alla seconda di questo. Si conclude dunque, che scritto il numero proposto 532 sotto il numero dato in modo, che le unità del medesimo ordine si corrispondano in colonna, e poi tirato frego; se ripetendo, come si sà, il numero superiore di mano in mano per ciascuna cifra dell' inferiore, si scrive il resultato di ciascuna ripetizione in modo, che la sua prima cifra corrisponda in colonna a quella, per cui si fà una tal ripetizione, la somma di tutti questi resultati così scritti sarà quella, che si cerca.

Ecco il tipo del calcolo pel caso, in cui, essendo 532 il numero proposto, il numero dato è 2 327.

```
      2 327
        532
    -------
      4 654
     69 81
  1 163 5
  ---------
  1 237 964 Somma
```

Se il numero proposto non ha tutte le sue cifre significative, siccome si può sempre riguardare come decomposto in più numeri parziali, che siano soltanto le sue cifre *significative* seguite da degli zeri, è facil persuadersi, che la ripetizione per cotesto numero del numero dato si ridurrà sempre a quella per ciascuna delle sue cifre *significative* soltanto.

Essendo per es. 47 032 il numero dato, e 5 009 il proposto, ecco il tipo del calcolo

$$\begin{array}{r} 47\ 032 \\ 5\ 009 \\ \hline 423\ 288 \\ 235\ 160 \\ \hline 235\ 583\ 288 \end{array} \text{ Somma}$$

11. Chiamandosi *moltiplicazione* la operazione di ripetere un numero qualunque dato un certo numero proposto di volte, noi chiameremo pure *moltiplicando* il primo di questi numeri, e *moltiplicatore* il secondo.

La somma poi *prodotta* dalla moltiplicazione dirassi *prodotto* di cotesti due numeri.

Pertanto per moltiplicare due numeri trà loro, ed averne il prodotto, da ciò che precede resulta

« 1.° Che per moltiplicare un numero di più
« cifre per quello d' *una cifra sola*, si mol-
« tiplica, come si sà dalla Tavola di Pittagora,
« a cominciar da destra, ciascuna cifra del
« moltiplicando per la cifra del moltiplicatore,
« coll' avvertenza di scriver soltanto le unità
« di ciascun prodotto sotto la cifra del molti-
« plicando, che le ha date, ritenendo le die-
« cine, se ve ne sono, per riunirle al prodotto
« seguente ».

« 2.° Che per moltiplicare un numero di più
« cifre per un' altro parimente di *più cifre*,
« dopo avere scritto questo sotto quello, in
« modo che le unità del medesimo ordine si
« corrispondano in colonna, e tirato frego, si
« moltiplica di mano in mano il moltiplican-
« do per ciascuna cifra *significativa* del mol-
« tiplicatore, (come ora si è detto 1.°); e
« scrivendo ciascun *prodotto parziale* in modo,
« che le sue unità semplici restino sotto la ci-
« fra significativa del moltiplicatore, la quale
« le ha date, si fà la somma di tutti i pro-
« dotti parziali ottenuti ».

Ecco il tipo del calcolo di parecchj esempj per servir d' esercizio

886 633	53 687	870 497
777	908	500 407
6 206 431	429 496	6 093 479
62 064 31	48 318 3	348 198 8
620 643 1	48 747 796	435 248 5
688 913 841		435 602 792 279

5 554 444	7 324 213 889
79 765	79 872
27 772 220	14 648 427 778
333 266 64	512 694 972 23
3 888 110 8	5 859 371 111 2
49 989 996	65 917 925 001
388 811 08	512 694 972 23
443 050 225 660	584 999 611 742 208

43 782	7 301 230 000
43 782	921 005 000
87 564	3 650 615
3 502 56	730 123
30 647 4	14 602 46
131 346	6 57 110 7
1 751 28	6 724 469 636 150 000 000
1 916 863 524	

12. Del resto nel caso particolare, in cui il moltiplicando od il moltiplicatore, od ambedue sono terminati da degli zeri, la operazione s' abbrevia, facendola come se cotesti zeri non vi fossero, e poi restituendoli tutti di seguito al prodotto, come nell' esempio ultimo. Inoltre, siccome in ogni caso i prodotti parziali, che di mano in mano si fanno, sono tanti, quante sono le cifre significative del moltiplicatore, così, se queste saranno più delle significative del moltiplicando, all' oggetto di fare il minor numero possibile di prodotti parziali, l' addizione de' quali riesca poi più facile, noi baratteremo volentieri il moltiplicatore ed il moltiplicando trà loro, sicuri di giunger sempre al medesimo resultato, per le stesse ragioni di sopra (8) nel caso, in cui essi erano ciascuno d' una cifra sola.

13. Dopo aver fatta la moltiplicazione d' un numero *per* un' altro, ed averne ottenuto il prodotto niente impedisce di moltiplicar da capo un tal prodotto *per* un terzo numero; ed il nuovo prodotto, che s' ottiene, *per* un quarto numero; e così di seguito col medesimo ordine.

In quanto che cotesti numeri concorrono tutti alla formazione, o *fattura*, dell' ultimo prodotto che si ottiene, si sogliono chiamare *fattori* d' un tal prodotto.

14. Prima di lasciar da parte i nostri gettoni, noi dimostreremo col loro mezzo la seguente general proposizione.

« Qualunque sia il numero de' fattori, che
« concorrono a formare un prodotto, il *valore*
« di un tal prodotto resulterà sempre il me-
« desimo in *qualunque ordine* cotesti fattori
« si moltiplichino trà loro ».

Per render più semplice, che sia possibile, la dimostrazione d'una tal proposizione, in primo luogo, chiamandosi per ordine *primo*, *secondo*, *terzo*, *quarto* . . . i fattori, di cui si tratta, noi gli denoteremo respettivamente per (1), (2), (3), (4), . . . ; e per rappresentarne il prodotto noi interporremo ad essi la preposizione *per*, come segue

(1) *per* (2) *per* (3) *per* (4) . . . . .

In secondo luogo, osservando, che per permutare trà loro in tutti i modi possibili un numero qualunque di fattori, basta, che stando fisso ognuno di essi in un dato posto, come per es. nell' ultimo, gli altri si permutino trà loro in tutti i modi possibili, è facil persuadersi, che, siccome permutandosi trà loro i due fattori (1), (2) si hanno i due prodotti (1) *per* (2), (2) *per* (1), così, ognuno de' trè fattori (1), (2), (3) stando fisso nel terzo posto, mentre gli altri due si permutano trà loro, si avranno i sei prodotti seguenti

(1) *per* (2) *per* (3), (2) *per* (1) *per* (3);
(1) *per* (3) *per* (2), (3) *per* (1) *per* (2);
(2) *per* (3) *per* (1), (3) *per* (2) *per* (1);

e quindi, ognuno de' quattro fattori (1), (2), (3), (4) stando fisso nel quarto posto, mentre gli altri trè si permutano tra loro, si avranno ventiquattro prodotti differenti; e cosí di seguito. Posto ciò

Ecco, come col soccorso de' nostri gettoni si può dimostrare

Che i due prodotti di due fattori avranno lo stesso valore;

Che i sei prodotti di trè fattori avranno lo stesso valore;

Che i ventiquattro prodotti di quattro fattori avranno lo stesso valore;

e così di seguito.

Prendendo dalla massa de' nostri gettoni quanti mai gruppi compagni si vogliano, disponiamoli orizzontalmente in più file uguali trà loro, in modo, che si formino contemporaneamente anche più file verticali uguali; e vediamo, come si può ottenere il numero dei gettoni di tutti cotesti gruppi.

Volendosi in primo luogo il numero de' gettoni de' gruppi di una sola fila orizzontale, è chiaro ch' esso s' otterrà facendo

« Il prodotto del numero de' gettoni d' un

« *gruppo* pel numero de' gruppi d' una fila *orizzontale*.

S' imagini adesso, che di tutti i gruppi di ciascuna fila orizzontale siasi fatto un solo gruppo più grosso; è chiaro pure, che di questi secondi gruppi più grossi se ne avranno tanti, quanti erano quelli più piccoli, che formavano una sola fila verticale.

Volendosi dunque in secondo luogo il numero de' gettoni di tutti questi secondi gruppi più grossi, ossia il numero totale de' gettoni presi alla massa, bisognerà moltiplicare il prodotto precedente, che rappresenta ora il numero de' gettoni d' un sol gruppo più grosso, pel numero de' primi gruppi d' una sola fila verticale.

Si conclude dunque definitivamente, che

« Il prodotto del numero de' gettoni d' un
« *gruppo* pel numero de' gruppi d' una fila
« *orizzontale*, moltiplicato pel numero di quel-
« li d' una fila *verticale* ».

ci darà il numero totale de' nostri gettoni presi alla massa.

Ma, invece di cominciare a fare questo prodotto, prima per mezzo de' gruppi d' una fila *orizzontale*, e poi per mezzo di quelli d' una *verticale*, noi potevamo viceversa incominciare prima da una fila *verticale*, e poi passare ad una fila *orizzontale*.

Barattando dunque nel prodotto precedente trà loro le due parole *orizzontale* e *verticale*, si conclude pure definitivamente che

« Il prodotto del numero de' gettoni d' un
« *gruppo* pel numero de' gruppi d' una fila
« *verticale*, moltiplicato pel numero di quelli
« d' una fila *orizzontale* »

ci darà lo *stesso* numero totale de' gettoni presi alla massa.

Astraendo dunque da' nostri gettoni, e supponendo che il numero di quelli d' un sol gruppo resulti dal fare il prodotto di più altri numeri, ciò che sempre si può, si conclude.

« Che in un prodotto di più fattori si pos-
« sono sempre barattare trà loro i due ultimi,
« senza che il *valore* d' un tal prodotto si
« alteri ».

Siccome nel caso particolare, in cui a ciascun gruppo si fosse sostituito un solo gettone respettivo, il numero totale de' gettoni presi alla massa si sarebbe ottenuto moltiplicando il numero di quelli d' una fila *orizzontale* pel numero di quelli d' una fila *verticale*, egualmente che viceversa, così in un prodotto di due fattori soli questi si possono pure barattare trà loro, senza che il suo *valore* si alteri.

Quindi segue, che in un prodotto *da farsi* di più fattori potendosi di mano in mano riguardar come *fatto* il prodotto de' primi due, trè, quattro ...., siccome in ciascuno di questi prodotti parziali si può portare il primo fattore nel secondo posto, il secondo nel terzo, il terzo nel quarto ... senza ch' esso si alteri, così in un prodotto d' un numero qualunque di fattori questi si potranno portare ad uno per volta tutti nell' ultimo posto senza, che il prodotto totale si alteri.

Torniamo adesso a considerare i prodotti di sopra di due, o di trè, o di quattro .... fattori.

Considerando un prodotto di due fattori, siccome permutandosi questi trà loro il prodotto non si altera, così i due prodotti di sopra, di due fattori l' uno, hanno lo stesso valore.

Considerando un prodotto di trè fattori, siccome portandosi ciascuno di questi nel terzo posto, e poi permutandosi trà loro gli altri due, il prodotto non si altera, così i sei prodotti di sopra, di trè fattori l' uno, hanno lo stesso valore.

Considerando un prodotto di quattro fattori, siccome portandosi ciascuno di questi nel quarto posto, e poi permutandosi trà loro gli altri trè, il prodotto non si altera, così i ventiquattro prodotti di sopra, di quattro fattori l' uno, hanno lo stesso valore.

Generalmente, considerando un prodotto d' un numero qualunque di fattori, siccome portandosi ciascuno di questi nell' ultimo posto, e poi permutandosi trà loro gli altri, il prodotto non si altera, così tutti i differenti possibili prodotti di sopra d' un medesimo ed arbitrario numero di fattori hanno lo stesso valore.

Apparisce inoltre che il numero di tutte le possibili permutazioni trà più fattori si ottiene col moltiplicare il numero di questi pel numero delle permutazioni, fattibili con un fattore di meno.

15. Ciò, che si è detto intorno alle permutazioni, ci pone in grado di assegnare, indipendentemente dal modo ordinario, la somma di tutti i numeri, che resultano da un numero dato qualunque scritto, permutando trà loro in tutti i modi possibili le sue cifre.

Trattando le cifre del numero dato, come fattori d' un prodotto, siccome tutti i numeri, che risultano da tutte le possibili permutazioni trà coteste cifre, s' ottengono collo scrivere di mano in mano ciascuna cifra in un determinato posto, e nel medesimo tempo col permutar le altre trà loro in tutti i modi possibili, così nel nostro sistema di Numerazione ciascuna cifra avendo un valore, che si ottiene col moltiplicarla o per 1, o per 10, o per 100, . . . secondo che essa si trova, a cominciar da destra, o nel primo, o nel secondo, o nel terzo . . . posto, con un pò di riflessione è facile persuadersi, che le cifre del numero dato, relativamente alla posizione che possono avere in tutti i numeri, de' quali si vuole la somma, considerate ciascuna

1.° Come situate nel primo posto, avranno nel loro insieme un valore, che si *calcolerà* col fare il prodotto del numero di tutte le permutazioni trà coteste cifre, eccettuatane una (il qual numero può denotarsi col segno (1)), moltiplicato per la somma di tutte, e poi per 1.

2.° Come situate nel secondo posto, avranno nel loro insieme un valore, che si calcolerà col fare il prodotto del numero (1) moltiplicato per la medesima somma, e poi per 10.

3.° Come situate nel terzo posto, avranno nel loro insieme un valore, che si calcolerà col fare il prodotto del medesimo numero (1) per la loro somma medesima e poi per 100. e così di seguito.

Quindi si conclude, che denotandosi col segno (2) il numero, che resulta dal fare il prodotto del numero (1) per la somma delle cifre del numero dato, tali quali sono isolate; e reputando cotesto medesimo numero (2) di mano in mano come un numero di unità semplici, di diecine, di centinaja, . . ., se esso si scrive convenientemente tante volte, quante sono le cifre del numero dato, la somma de' numeri così scritti sarà la somma voluta.

Se per es. 271 è il numero dato di trè cifre; siccome 2 è il numero delle permutazioni trà due cifre, e 10 è quello della somma di tutte e trè, scrivendo il prodotto 20 di 2 per 10, trè volte come segue

$$\begin{array}{r} 20 \\ 20 \\ 20 \\ \hline 2\,220 \end{array}$$ Somma

si ha la somma, che si vede

Se il numero dato fosse 201, essendo 6 il prodotto di 2 per 3, si avrebbe

$$\begin{array}{r} 6 \\ 6 \\ 6 \\ \hline 666 \end{array}$$ Somma

CASO III.

16. Quando nella moltiplicazione d' un numero per un' altro il moltiplicando è compagno al moltiplicatore, come nel penultimo degli esempj di sopra (11); ossia quando i due fattori d' un prodotto sono trà loro uguali, questo prodotto, il quale non è che la somma di tanti numeri uguali, quante unità contiene uno di essi, dicesi *potenza seconda* d' uno di questi numeri, mentre questo stesso numero dicesi per estensione *potenza prima* di se medesimo.

La potenza seconda si suole spessissimo chiamare anche *Quadrato*; ed eccone la ragione.

Chiamandosi *Quadrato* una casella perfettamente quadra, disegnata sopra un piano, se s' imaginano tante file di caselle quadre compagne, quante sono le caselle d'una fila, è chiaro, che, essendo situate una accanto all' altra sullo stesso piano, formeranno una casella quadra più grande, ossia un *Quadrato*, il quale sarà composto di tante caselle quadre più piccole, quante sono quelle d' una fila ripetute in complesso un egual numero di volte.

Così per es. 10 file, di 10 caselle quadre l' una, formano un quadrato di 100 caselle; e però si dice, che 100, prodotto di 10 moltiplicato per 10, è il *quadrato* di 10.

17. Se il moltiplicando, invece di essere precisamente lo stesso del moltiplicatore, è piuttosto uguale alla di lui potenza seconda, od al quadrato; ossia, se trè fattori d' un prodotto sono trà loro uguali, questo prodotto, il quale non è, che la somma di tanti numeri uguali al quadrato d' uno di tali fattori, quante unità esso contiene, dicesi *potenza terza* d' un tal fattore.

La potenza terza si suole spessissimo chiamare anche *Cubo*; ed eccone quì pure la ragione.

Chiamandosi *Cubo* un dado, di cui le sei faccie sono quadrati tutti compagni, se sopra ogni casella del quadrato formato precedentemente s' imagina collocato un cubo compagno, di cui la faccia a contatto colla casella copra questa esattamente, si formerà uno *strato* di cubi tale, che, imaginandogliene sopprapposto un' altro compagno, poi un' altro, poi un' altro, ... finchè si abbiano tanti strati quanti sono i dadi stati collocati in una fila di caselle del quadrato, si formerà pure un *Cubo* più grosso, il quale sarà composto di tanti primi cubi più piccoli, quante unità contiene il prodotto del quadrato del numero di quelli d' una fila, moltiplicato per questo stesso numero.

Così per es. 10 strati, di 10 file di 10 cubi l' una, formano un cubo più grosso, composto di 1 000 piccoli cubi compagni; e però si dice, che 1 000, prodotto di 100 moltiplicato per 10, è il cubo di 10.

18. Se, dopo aver formato il cubo d'un numero, esso si moltiplica per questo numero; ed il prodotto da capo per lo stesso numero; e così di seguito, i successivi prodotti, che ne resultano di quattro, cinque, . . . fattori uguali si chiamano respettivamente *quarta*, *quinta* . . . . potenza; nè si distinguono con altri nomi particolari: la operazione poi, che si fà per ottenere le potenze d'un numero qualunque dicesi *Elevazione a potenze*.

19. Dal fin quì detto pertanto apparisce

1.° Che la *seconda potenza*, od il *quadrato* d'un numero non è, che la *somma* di tanti numeri uguali a lui medesimo, quante unità esso contiene.

2.° Che la *terza potenza*, od il *cubo* d'un numero non è, che la *somma* di tanti numeri uguali al suo quadrato, quante unità esso contiene.

3.° Che la *quarta potenza* d'un numero non è, che la somma di tanti numeri compagni al suo cubo, quante unità esso contiene.

E generalmente, che una potenza comunque *elevata* d'un numero non è, che la somma di tanti numeri uguali ad una sua potenza d'un *grado* inferiore d' una unità, quante unità contiene cotesto stesso numero.

20. Volendosi adesso occupare in particolare della elevazione d' un numero al quadrato ed al cubo, e desiderando di far vedere, come ciascuna delle cifre d' un tal quadrato, o cubo si possano determinare per mezzo di quelle del numero stesso, indipendentemente dalla maniera solita di eseguire la moltiplicazione, noi cominceremo dal fare le seguenti osservazioni.

Siccome per la formazione del quadrato d' un numero, dopo avergliene sottoscritto un' altro compagno, non si ha da far altro, a cominciar da destra, che moltiplicare la prima, seconda, terza . . . . cifre superiori per la prima inferiore; e poi da capo la prima, seconda, terza, . . . cifre superiori insieme di mano in mano separatamente per la seconda, per la terza, . . . cifra inferiore, così è facil vedere, che in sostanza ci riduciamo a moltiplicare

1.° La prima cifra superiore per la prima inferiore.

2.° La seconda, terza, . . . cifre superiori insieme per la prima inferiore.

3.° La prima cifra superiore per la seconda, terza, . . . cifre inferiori insieme.

4.° La seconda, terza, . . . cifre superiori insieme per la seconda, terza, . . . cifre inferiori parimente insieme.

Quindi è, che, siccome coteste cifre inferiori e superiori corrispondenti sono trà loro respettivamente compagne, e perciò il prodotto 2.° della seconda, terza, . . . cifre superiori insieme per la prima inferiore equivale al prodotto 3.° della prima cifra superiore per la seconda, terza, . . . cifre inferiori insieme (14), così si conclude, che per formare il quadrato d' un numero qualunque di più cifre si deve fare a parte

1.° Il quadrato della sua prima cifra a destra, ossia il quadrato delle unità.

2.° Il *doppio* del prodotto di questa cifra per le altre a sinistra, le quali compongono un numero di diecine.

3. Il quadrato di queste seconde cifre, ossia il quadrato del numero delle diecine espresso da esse.

e quindi sommar tutto insieme.

Da queste osservazioni è facil concludere, che per formare il quadrato d' un numero qualunque, in un modo diverso dalla moltiplicazione ordinaria, si può tenere la regola seguente

« 1.° Scritto cotesto numero, e tirato sotto
« frego, se ne faccia parzialmente il prodotto

« per la sua prima cifra a destra, coll' avver-
« tenza, che nell' atto, che si moltiplica per
« lei ciascuna cifra a sinistra, si *raddoppj*
« ciascun prodotto.

« 2.° Soppressa, od imaginando soppressa la
« prima cifra a destra, si faccia pure parzial-
« mente il prodotto del numero, che resta,
« per la sua prima cifra a destra coll' avver-
« tenza medesima; e così di seguito fino alla
« ultima cifra a sinistra, che si moltiplicherà
« per se stessa soltanto.

« 3.° Si scriva ciascun prodotto parziale sot-
« to il frego tirato in modo, che la prima
« cifra dell' uno corrisponda alla terza del pre-
« cedente, e poi si sommino tutti.

La ragione di questa ultima avvertenza si è, che dopo la soppressione di mano in mano fatta della prima cifra, che si riguarda come di unità, il numero espresso dalle altre, che restano, essendo di *diecine*, il suo quadrato è un numero di *centinaja*.

Si debba per un' esempio della operazione prescritta da questa regola fare il quadrato del numero 7 345.

Ecco il tipo del calcolo

$$\begin{array}{r} 7\ 345 \\ \hline 73\ 425 \\ 585\ 6 \\ 4\ 29 \\ 49 \\ \hline 53\ 949\ 025 \end{array}$$

che io eseguisco così.

« 5 via 5, 25. (Ritengo 2 e segno 5).
« 4 via 5, 20; e 20, 40; e 2 di ritenu-
« to, 42. (Ritengo 4, e segno 2).
« 3 via 5, 15; e 15, 30, e 4, 34. (Ri-
« tengo 3, e segno 4).
« 5 via 7, 35; e 35, 70; e 3, 73. (Se-
« gno 73).

Poi dico

« 4 via 4, 16. (Ritengo 1, e segno 6 sotto
« la terza cifra 4 del prodotto precedente).
« 3 via 4, 12; e 12, 24; e 1, 25. (Ri-
« tengo 2, e segno 5).
« 4 via 7, 28; e 28, 56; e 2, 58. (Se-
« gno 58).

Poi dico

« 3 via 3, 9. (Segno 9 sotto la terza ci-
« fra 8 del prodotto precedente).
« 3 via 7, 21; e 21, 42. (Segno 42)..
Finalmente
« 7 via 7, 49. (Segno 49 nel modo solito).

Tirando frego ed addizionando i prodotti *parziali* ottenuti nella loro somma 53 949 025 ho il quadrato del numero 7 345.

21. E vero, che per la esecuzione del calcolo bisogna sapere mentalmente addizionare de' numeri di *due* cifre l' uno; ma ciò si suppone volentieri, in quanto che l' abitudine ad addizionare ci deve a questa ora avere insegnato a farlo.

Ecco il tipo del calcolo di trè altri esempj per servir d' esercizio

34 027	12 372	978 998
476 329	49 484	15 663 904
1 360 4	1 726 9	176 210 1
256	7 29	1 761 21
9	44	15 584
	1	130 9
		81
1 157 836 729	153 066 384	958 437 084 004

22. Passando adesso a vedere, come si può formare il cubo d' un numero in un modo di-

verso dalla moltiplicazione ordinaria, siccome il cubo d' un numero si ottiene col moltiplicarne il quadrato per lo stesso numero, così, decomponendosi questo numero nella cifra delle sue unità semplici, ed in quelle delle sue diecine, bisognerà moltiplicare prima per cotesta cifra e poi per le altre i trè resultati di sopra (20) ottenuti, cioè

Il quadrato della prima cifra

Il doppio del prodotto di questa cifra per le altre

Il quadrato di queste seconde cifre.

Ora per la prima di queste moltiplicazioni è facil vedere che si avrà

1.° Il cubo della prima cifra

2.° Il doppio del prodotto del di lei quadrato per le altre cifre

3.° Il prodotto di lei pel quadrato di queste.

Facendo poi la seconda moltiplicazione si avrà

4.° Il prodotto del quadrato della prima cifra per le altre.

5.° Il doppio del prodotto di lei pel quadrato di queste.

6.° Il cubo di queste stesse cifre.

Riunendo insieme il *doppio* prodotto 2.° col prodotto 4.° ciò che si può, si ha

Il *triplo* del prodotto del quadrato della prima cifra per le altre; e riunendo il prodotto 3.° col *doppio* prodotto 5.°, ciò che pure si può, si ha

Il *triplo* del prodotto della prima cifra pel quadrato delle altre

La riunione adunque di 1.°, 2.°, 3.°, 4.°, 5.°, 6.°, ci darà

1.° Il cubo della prima cifra

2.° Il *triplo* del prodotto del di lei quadrato per le altre

3.° Il *triplo* del prodotto di lei pel quadrato di queste

4.° Il cubo di queste stesse cifre.

Quindi si conclude, che per la formazione del cubo d' un numero qualunque di più cifre si potrà fare a parte

1.° Il cubo della sua prima cifra a destra, ossia il cubo delle unità.

2.° Il triplo del prodotto del quadrato di questa cifra per le altre a sinistra, le quali compongono un numero di diecine.

3.° Il triplo del prodotto del quadrato di queste seconde cifre per la prima, e addizionar tutto; e poi alla somma aggiungere

4.° Il cubo delle cifre delle diecine.

23. All' oggetto di facilitare la esecuzione materiale del calcolo ne' diversi esempj d' ap-

plicazione, che andiamo a dare, noi faremo alcune osservazioni.

Siccome il triplo prodotto 2.° del *quadrato* della prima cifra per le altre si può fare col moltiplicare per la prima cifra il prodotto di lei stessa pel triplo delle altre, ed il triplo prodotto 3.° del *quadrato* di quest' altre cifre per la prima si può pur fare col moltiplicare per questa quelle medesime cifre, e pel triplo loro, così dovendosi riunire insieme, cotesti due prodotti 2.° 3.° con un pò di riflessione è facil persuadersi, che si potrà ottenere la loro somma col fare il prodotto di tutte le cifre pel triplo di quello della prima, moltiplicata per le altre, ossia, prima col fare il triplo del prodotto di tutte le cifre, moltiplicate per loro medesime, tolta la prima cifra, e poi col moltiplicare l' ottenuto prodotto per questa stessa cifra.

Ma dovendosi aggiungere al resultato il cubo 1.° della prima cifra, il quale s' effettua col moltiplicare il di lei quadrato per lei stessa, con un pò di riflessione pure è facil persuadersi, che la riunione di 1.°, 2.°, 3.°, insieme s' effetuerà col far l' addizione del quadrato della prima cifra, e del prodotto di ciascuna delle altre moltiplicate pel triplo di tutte, e poi col moltiplicar la somma per la prima medesima cifra.

Quest' ultimo resultato proveniente dalla riunione di 1.°, 2.°, 3.°, ch' esclude il cubo del numero proposto mutilato della prima cifra, cioè il prodotto 4.°, chiamandosi un *prodotto parziale*, da quanto abbiamo detto intorno alla formazione del cubo d' un numero, noi possiamo per la esecuzione materiale del calcolo prescrivere la regola seguente.

« Si faccia a parte il quadrato della prima « cifra a destra del numero proposto; e poi, « moltiplicando questo numero successivamente « per ciascuna delle altre sue cifre a sinistra, « coll' avvertenza di *triplicare* ciascuno de' pro- « dotti di cifra per cifra, i prodotti totali, « che di mano in mano s' ottengono, conside- « rati respettivamente come numeri di diecine, « centinaja, migliaja, . . ., si scrivano sotto « il quadrato fatto, considerato come numero « d' unità semplici. La somma di questi nu- « meri così scritti, moltiplicata per la prima « cifra, ci darà *uno de' prodotti parziali*, che « si vogliono, il quale si scriverà come nume- « ro d' unità sotto il numero proposto separato « da un frego.

« Soppressa, od imaginando soppressa nel « numero proposto la prima cifra, si ripete-

« ranno per rapporto al numero residuo le
« stesse operazioni; ed, ottenuto un *secondo*
« *prodotto parziale*, questo si scriverà sotto
« al prodotto precedente, coll'avvertenza, che
« la sua prima cifra corrisponda in colonna
« alla quarta di quello, per la ragione, che,
« attesa la soppressione fatta della prima cifra
« nel numero proposto, il numero residuo es-
« sendo di *diecine*, il secondo prodotto par-
« ziale ottenuto, ch'è porzione del cubo di
« cotesto numero residuo, và considerato come
« un numero di *migliaja*.

« Operando nello stesso modo di seguito si-
« no alla ultima cifra, cioè sino alla prima a
« sinistra del numero proposto, soppresse, od
« imaginando soppresse tutte le altre, *di*
« *questa cifra si farà soltanto il cubo*, il
« quale si scriverà coll'avvertenza medesima
« sotto l'ultimo prodotto parziale ottenuto.

« La somma di tutti cotesti *prodotti par-*
« *ziali* e dell'ultimo *cubo parziale* sarà il cu-
« bo totale del numero proposto.

Si voglia per un esempio il cubo del nume-
ro 3 564.

Ecco il tipo del calcolo

3 564	16	36	25	
152 254 144	641 52	53 40	3 15	
2 243 016	5 346 0	320 4	3 175	9
15 875	32 076	373 836		
27	38 063 536			
45 270 270 144				

che io eseguisco, operando e dicendo come segue
« 4 via 4 , 16. (Scrivo a parte 16)
Poi dico
« 4 via 6 , 24; e 24 , 48; e 24, 72. (Ri-
« tengo 7 , e segno 2 sotto la seconda cifra
« del quadrato fatto)
« 6 via 6, 36; e 36, 72; e 36, 108; e 7
« di ritenuto, 115. (Ritengo 11, e segno 5)
« 5 via 6, 30; e 30, 60; e 30, 90; e 11,
« 101. (Ritengo 10, e segno 1)
« 3 via 6, 18; e 18, 36; e 18, 54; e 10,
« 64 (Segno 64)
Poi dico
« 4 via 5, 20; e 20, 40; e 20, 60. (Ri-
« tengo 6 , e segno 0)
« 5 via 6 , 30 ; e 30 , 60 ; e 30 , 90 ; e 6,
« 96. (Ritengo 9 e segno 6)

« 5 via 5, 25; e 25, 50; e 25, 75; e 9,
« 84. (Ritengo 8, e segno 4)
« 3 via 5, 15; e 15, 30; e 15, 45, e 8,
« 53. (Segno 53)

Poi dico

« 3 via 4, 12, e 12, 24; e 12, 36. (Ri-
« tengo 3, e segno 6)
« 3 via 6, 18; e 18, 36; e 18, 54; e 3,
« 57. (Ritengo 5, e segno 7)
« 3 via 5, 15; e 15, 30; e 15, 45; e 5,
« 50. (Ritengo 5, e segno o)
« 3 via 3, 9; e 9, 18; e 9, 27; e 5,
« 32. (Segno 32)

Addiziono, e poi moltiplicando la somma 38 063 536 per la prima cifra 4, porto il prodotto parziale 152 254 144, che trovo, sotto al numero proposto separato da un frego.

Obliata la prima cifra 4, sul numero residuo 356 opero nello stesso modo come segue

« 6 via 6, 36. (Scrivo a parte 36)

Poi

« 5 via 6, 30; e 30, 60; e 30, 90. (Ri-
« tengo 9, e segno o)
« 5 via 5, 25; e 25, 50; e 25, 75; e 9,
« 84. (Ritengo 8, è segno 4)
« 3 via 5, 15; e 15, 30; e 15, 45; e 8,
« 53. (Segno 53)

Poi

« 3 via 6, 18; e 18 36; e 18, 54. (Ri-
« tengo 5, e segno 4)
« 3 via 5, 15; e 15, 30; e 15, 45; e 5,
« 50. (Ritengo 5, e segno 0)
« 3 via 3, 9; e 9, 18; e 9, 27; e 5,
« 32. (Segno 32)

Addiziono, e poi moltiplicando la somma 373 836 per la cifra 6, scrivo il nuovo prodotto parziale 2 243 016, che trovo, sotto al precedente, come si vede.

Obliata anche la cifra 6, sul nuovo numero residuo 35 opero pure così

« 5 via 5, 25. (Scrivo a parte 25).

Poi

« 3 via 5, 15; e 15, 30; e 15, 45. (Ri-
« tengo 4, e segno 5)
« 3 via 3, 9; e 9, 18; e 9, 27; e 4,
« 31. (Segno 31)

Addiziono, e poi moltiplicando la somma 3 175 per la cifra 5, scrivo il nuovo prodotto parziale 15 875, che trovo, sotto al secondo precedente, come si vede.

Finalmente dopo aver fatto pure a parte il quadrato 9 della prima cifra 3 a sinistra, moltiplicandolo per 3, porto il cubo 27 che trovo, al suo posto, come si vede.

Addiziono tutto, e trovo pel cubo del numero proposto 3 564 il numero 45 270 270 144.

Ecco il tipo del calcolo di due altri esempj per servir d' esercizio

3 714	16	1	9	
	111 42	77 91	3 37	
165 347 344	7 799 4	333 9		9
411 811	33 426		3 379	
23 653		411 811		
27	41 336 836			
51 230 158 344				

32 068	64	36	4	
	5 772 24	1 923 6	2 88	
24 674 402 432	192 408	28 854		9
184 665 816	2 886 12		2 884	
5 768		30 777 636		
27	3 084 300 304			
32 977 340 218 432				

PREZZO

Una Lira.